**第13讲 整式的概念**

**知识梳理**

**1．用含有字母的式子表示数量关系**

**(1)用字母表示数**

用字母表示数，字母和数一样可以参与运算，可以用式子把数量关系简明地表示出来.

**(2)代数式**

**a．概念——**用运算符号和括号把数或表示数的字母连接而成的式子.

**例1：**下列式子是代数式的有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(1) *S*=*π* (2) 2(*n*+1) (3) 0 (4) 2*x* (5)  (6)2×3

**b．代数式的书写要求**

① \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

② \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

③ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

④ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

⑤ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

⑥ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

问：下列式子中，你认为哪些不符合代数式书写要求的：

，，，，*a*＋*b*千克，，60％*x*

**c．代数式的读法**

**例2：**根据题意写出相关代数式：

(1)*x*除以*y*与*z*的积；\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(2)*a*加*b*的平方：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**体会：**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**例3：**用语言表述的意义.

**d．代数式的值：**用数值代替代数式里的字母，按照代数式中的运算关系计算得出的结果.

**例4：**已知梯形的面积公式为，其中*a*=3，*h*=4，*s*=24，用含*a*，*h*，*s*的代数式表示*b*，并求*b*的值.

**2．单项式**

(1)定义：由数与字母的积或字母与字母的积所组成的代数式叫做**单项式**；单独的一个数或一个字母也是单项式．

(2)系数：单项式中的**数字因数**叫做这个**单项式的系数**．

(3)次数：一个单项式中，所有字母的**指数的和**叫做这个**单项式的次数**．

**3．多项式**

(1)定义：由几个单项式的**和**组成的代数式叫做**多项式**；在多项式中的每个单项式叫做多项式的**项**．

(2)常数项：不含字母的项叫做**常数项**．

(3)次数：多项式中**次数最高项**的次数就是这个多项式的次数．

(4)多项式的排列：

①把一个多项式按某一字母的指数从大到小的顺序排列起来，叫做把这个多项式按这个字母**降幂排列**；

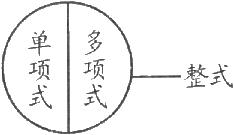
②把一个多项式按某一个字母的指数从小到大的顺序排列起来，叫做把这个多项式按这个字母的**升幂排列**．

**4．整式**

**单项式与多项式统称整式．**

[学法指导]单项式、多项式、整式的联系与区别

**联系：**(1)多项式是由单项式的和组成的，单项式、多项式统称为整式；

(2)整式、单项式、多项式的关系可以用图表示． 

**区别：**单项式的次数是把所有字母的指数加起来．多项式的次数是指其中的特殊单项式的次数，这个单项式是指多项式中次数最高的项．

[重要提示](1)不论是单项式还是多项式，都是整式.如单项式-3*x*2，*x*等，多项式3-*x*，-*x*3-*x*+1等都是整式.

(2)如果已知一个式子是整式，那么它或者是单项式，或者是多项式，二者必居其一.如在整式2*x*，*x*4-1中，2*x*是单项式，*x*4-1是多项式.

(3)分母中含字母的式子不是整式.

(4)在整式中，字母与数相乘、字母与字母相乘时通常省略乘号，且数字放到字母前面.作为系数的带分数写成假分数.

[易错提示]在判断一个整式是单项式还是多项式时，要适当对式子进行变形，如、2(*a*+*b*)不能误认为是单项式，它们变形后分别为，2*a*+2*b*，可见它们都是多项式.

**例5：**在下列代数式：中，哪些是单项式，哪些是多项式？

**例6：**填空：

的系数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，次数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

的系数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，次数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

的系数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，次数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(4)写出一个单项式，使它的系数为，次数为4，且含两个字母：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析](1)系数为，次数为5.(2)*π*为常数，故系数为，次数为字母*a*与*b*的指数的和.(3)系数为，次数为3.(4)此题答案不唯一，写出的单项式符合要求即可.

[答案](1)；5；(2)；4；(3)(答案不唯一)

**例7：**多项式5*x*2+*x*-1是\_\_\_\_\_\_\_次\_\_\_\_\_\_\_项式，常数项是\_\_\_\_\_\_\_，二次项系数是\_\_\_\_\_\_\_；

多项式3*x*2*y*-5*xy*2+*y*-2*x*是\_\_\_\_\_\_\_次\_\_\_\_\_\_项式，常数项是\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

多项式*ax*2+*bx*+*c*，当*a*＝0且*b*≠0时是\_\_\_\_\_\_\_次\_\_\_\_\_\_项式，当*b*＝0且*a*≠0时是\_\_\_\_\_\_\_次\_\_\_\_\_\_项式.

**例8：**将下列多项式按字母*x*降幂排列：

； ； 

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**典型解析**

**例1：**填空：

(1)若*m*为整数，则2*m*为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_数，2*m*-1为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_数；

(2)三个连续偶数，若中间一个为2*n*，则其余两个为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(3)若*k*为整数，以被4整除作为分类标准，则整数可分为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_共4类；

(4)若一个两位数，其个位数字为*a*，十位数字为*b*，则这个两位数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[解析]紧扣各类数的特征进行解答.

[答案](1)偶；奇(2)2*n*-2，2*n*+2；(3)4*k*，4*k*+1，4*k*+2，4*k*+3；(4)10*b*+*a*

[方法规律]奇偶数的区别在于能否被2整除.一个能被2整除，一个被2除余1；整数被4除可能的情况只有4种：整除、余1、余2、余3；两位数的表示方法：十位数字×10+个位数字.

**例2：**将式子：填入相应的大括号中.

单项式：{ …}；

多项式：{ …}；

整式：{ …}.

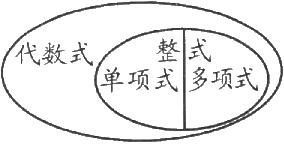
[答案]单项式：

多项式：

整式：

[方法规律]判断一个式子是单项式还是多项式，首先判断它是否是整式，若分母中含字母，则一定不是整式，也不可能是单项式或多项式，单项式与多项式的区别在于是否含有加减运算，整式中含加减运算的是多项式，不含加减运算的是单项式.

[拓展]代数式是用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子，如*a*，10，，*m*-*n*，等都是代数式，代数式、整式、单项式、多项式的关系是：代数式包含整式，整式又包含单项式和多项式，其包含关系如图.



**例3：**(1)当时，求多项式*a*3+3*a*2*b*+3*ab*2+*b*3的值.

(2) 已知(*x*-2)2+|*y*+1|=0，*a*，*b*互为相反数，*c*，*d*互为倒数，求*yx*-3*a*-3*b*+2*cd*的值.

(1) [解析]用字母的取值代替多项式中相应的字母，计算即可.

[答案]当时，*a*3+3*a*2*b*+3*ab*2+

(2) [解析]由已知得*x*-2=0，*y*+1=0，*a*+*b*=0，*cd*=1，把所求式变形，分别将*a*+*b*与*cd*看成整体代入所求式中求值即可.

[答案]因为(*x*-2)2+|*y*+1|=0，所以*x*=2，*y*=-1.

因为*a*，*b*互为相反数，*c*，*d*互为倒数，所以*a*+*b*=0，*cd*=1.

所以整式=(-1)2-3(*a*+*b*)+2=1+2=3.

[方法规律]本例先通过非负性、相反数定义、倒数定义求出相关字母及式子的值，再利用代入(整体代入)法求出要求式子的值.

**例4：**(1) 已知(*a*-2)*x*2*y*|*a*|+1是关于*x*，*y*的五次单项式，求(*a*+1)2的值.

(2) 已知关于*x*的多项式3*x*4-(*m*+5)*x*3+(*n*-1)*x*2-5*x*+3不含*x*3项和*x*2项，求*m*+2*n*的值.

(1) [解析]由五次单项式的特征：系数不为0，各字母的指数和为5可知2+|*a*|+1=5，则*a*=±2，又*a*-2≠0，故*a*=-2.将其代入所求式即可求值.

[答案]因为(*a*-2)*x*2*y*|*a*|+1是关于*x*，*y*的五次单项式，所以

所以*a*=-2，则(*a*+1)2=(-2+1)2=1.

(2) [解析]要使式子不含*x*3项和*x*2项，则-(*m*+5)*x*3和(*n*-1)*x*2都应该为0，故它们的系数-(*m*+5)和*n*-1应都为0.

[答案]依题意可知，-(*m*+5)=0，且*n*-1=0，则*m*=-5，*n*=1.所以*m*+2*n*=-5+2×1=-3.

**例5：**某公园的门票价格是：成人20元，学生10元，满40人可以购买团体票(打8折).设一个旅游团共有*x*人(*x*>40)，其中学生有*y*人.

(1)用含*x*，*y*的整式表示该旅游团购买团体票应付的总的门票费.

(2)如果旅游团有47个成人，12个学生，那么他们购买团体票共需付的门票费是多少？[解析](1)由于超过40人，购买的是团体票可以打折，所以总的门票费=(成人人数×20+学生人数×10)×0.8；(2)把*x*=47，*y*=12代入(1)中的整式即可.

[答案](1)因为成人门票费为20(*x*-*y*)元，学生门票费为10*y*元，所以总门票费为[20(*x*-*y*)+10*y*]×0.8元.

故该旅游团应付门票费[20(*x*-*y*)+10*y*]×0.8元.

(2)当该旅游团有47个成人，12个学生时，*x*-*y*=47，且*y*=12，

即[20(*x*-*y*)+10*y*]×0.8=(20×47+10×12)×0.8=848(元).

答：如果旅游团有47个成人，12个学生，那么他们购买团体票共需付的门票费为848元.

[技巧点拨]因为成人和学生的门票价格不相同，所以应先分别求出两种门票的费用，再求它们的和经打折后所得最终的总费用.

**摸索规律**

**难点突破**

**1、数列规律摸索(用正整数*n*表示一下数列的规律)**

第一组(基本数列)：

① 1，2，3，4，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

② 2，4，6，8，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

③ 1，3，5，7，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

④ 1，4，9，16，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

⑤ 1，8，27，64，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

第二组(变化数列)

① 3，7，11，15，19，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

② 9，16，23，30，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

③ 5，10，17，26，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

④ 7，26，63，124，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

⑤ 5，8，11，14，……\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**2、数列运算规律摸索**

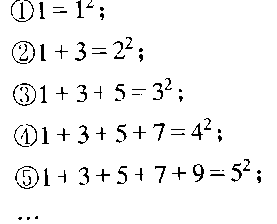
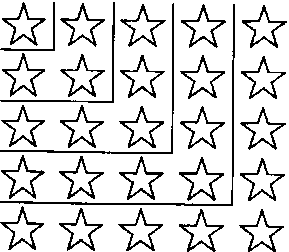
**例1：**研究下列等式：

15×15=225=1×2×100+5×5；25×25=625=2×3×100+5×5；

35×35=1225=3×4×100+5×5；45×45=2025=4×5×100+5×5；……

用代数式表示此规律(*n*为正整数)：=？\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；并请利用此规律快速求出752=？

**例2：**观察下列星阵图，并研究下列算式：

(1)用含有自然数*n*的等式表示你在研究中发现的规律：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

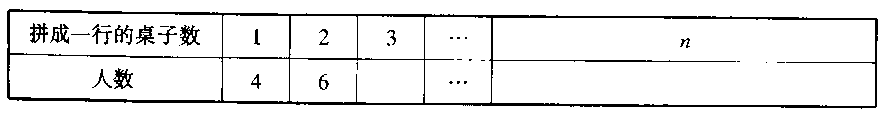
(2)计算：1＋3＋5＋……＋19＝\_\_\_\_\_\_\_\_；1＋3＋5＋……＋199＝\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**3、图形规律摸索**

**一般思考模式：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**例1：**学校阅览室有能坐4人的方桌，如果多于4人，就把方桌拼成一行，2张方桌拼成一行，2张方桌拼成一行能坐6人，

 按照这种拼法填写下列表格：

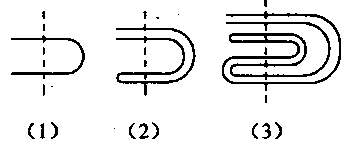


**例2：**把一条绳子从中间剪断，就成了2段，

(1)把一条绳子(第一次)对折后，从它对折后的中间剪断，就成了3段；

(2)把一条绳子两次对折后的中间剪断，就成了5段；

(3)把一条绳子*n*次对折后的中间剪断，就成了几段？



**同步训练**

**一、填空题**

1．用代数式表示比*m*与*x*的和的一半小6的数：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

2．设甲数是*x*，乙数是*y*，用代数式表示：

(1)甲乙两数的平方和：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(2)甲乙两数和的立方：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(3)甲、乙两数的绝对值的和除以甲、乙两相反数的差的商：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(4)甲数的立方加上乙数的平方的和的3倍除以乙数的9.2倍：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

3．在式子中，单项式的个数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个．

答案：4

4．若关于*x*的四次三项式的四次项的系数是2，二次项的系数是-1，常数项是1，则这个四次三项式为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：2*x*4-*x*2+1

5．四季公园计划修建一个圆形花坛，在花坛内修建一个圆形喷水池，然后在水池的周围种植花草．如果花坛的半径是*a* m，圆形喷水池的半径是*b* m，则用含有*a*，*b*的整式表示种植花草的面积是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，且这个整式是一个\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_次\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_项式．

答案：(*πa*2-*πb*2)m2；二；二 [提示]种植花草的面积=花坛的面积-喷水池的面积.

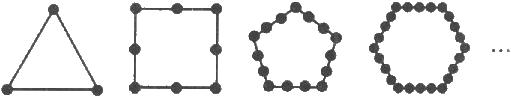
6．如果-2*x*2*ymz*2的次数与单项式3.5*a*4*b*3的次数相同，则*m*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：3 [提示]依题意，得2+*m*+2=4+3，所以*m*=3.

7．若多项式*x*2+2*kxy*-3*y*2+*x*-12中不含*xy*项，则*k*2-1=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：-1

8．如图，把同样大小的黑色棋子摆放在正多边形的边上，按照这样的规律摆下去，则第*n*(*n*是大于0的整数)个图形需要黑色棋子的个数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



答案：*n*(*n*+2)

**二、选择题**

9．某企业今年3月份产值为*a*万元，4月份比3月份减少了10%，5月份比4月份增加了15%，则5月份的产值是( )．

A．(*a*-10%)(*a*+15%)万元 B．*a*(1-10%)(1+15%)万元

C．(*a*-10%+15%)万元 D．*a*(1-10%+15%)万元

答案：B

10．如果一个多项式的次数是4，那么这个多项式的每一项的次数( )．

A．都小于4 B．都等于4 C．都不小于4 D．都不大于4

答案：D [提示]多项式的次数是4，即次数最高项的次数是4，故每一项的次数都不大于4.

**三、解答题**

11．已知*x*|*a*|*yb*是关于*x*，*y*的七次单项式，并且在数轴上表示*a*的点与原点的距离是3．

(1)求*a*，*b*的值；(2)求多项式*a*2+2*ab*+*b*2的值．

答案：(1)因为在数轴上表示*a*的点与原点的距离是3，所以*a*=-3，或*a*=3.

因为*x*|*a*|*yb*是关于*x*，*y*的七次单项式，所以|*a*|+*b*=7，所以*b*=7-3=4，即*a*的值为-3或3，*b*的值为4.

(2)当*a*=3，*b*=4时，*a*2+2*ab*+*b*2=32+2×3×4+42=49；

当*a*=-3，*b*=4时，*a*2+2*ab*+*b*2=(-3)2+2×(-3)×4+42=1.

[提示]根据在数轴上表示*a*的点与原点的距离是3，可求得*a*的值，由*x*|*a*|*yb*是关于*x*，*y*的七次单项式可求得*b*的值.

12．如果多项式*x*4-(*m*-2)*x*3+6*x*2-(*n*+1)*x*+7不含*x*的三次项和一次项，求*m*，*n*的值．

答案：由题意可知解得*m*=2，*n*=-1.

[提示]不含有*x*的三次项和一次项，即三次项和一次项的系数等于0.

**【探索创新】**

有一个多项式为*a*10-*a*9*b*+*a*8*b*2-*a*7*b*3+…，按这种规律写下去，请你写出它的第六项和最后一项，这个多项式是几次几项式？

答案：第六项是-*a*5*b*5，最后一项是*b*10，这个多项式是十次十一项式.

[提示]多项式中含有两个字母*a*，*b*，项的系数呈现+1，-1交替排列的规律，即奇数项的系数为1，且每一项的次数都是10次，*a*的次数从10递减直至0，*b*的次数从0递增直至10，所以多项式的第六项系数为-1，字母*a*的次数为10-6+1，字母*b*的次数为6-1.

**走进中考**

1．(2012·上海中考) 在下列代数式中，次数为三的单项式是（ ）

A． B． C． D．

答案：A

2．观察下面的单项式：*a*，-2*a*2，4*a*3，-8*a*4，…．根据你发现的规律，则第8个式子为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

[解析]每个单项式我们可以分成系数部分和字母部分分别寻找规律.在系数部分：1，-2，4，-8，…，我们不难得出规律，从-2起，依次为(-2)1，(-2)2，…，因此第8个单项式的系数为(-2)7；再看字母部分：*a*，*a*2，*a*3，*a*4，…，显然第8个单项式的字母部分为*a*8.综合起来得到第8个单项式为-128*a*8.

[答案]-128*a*8